SISTEMAS DE TRÉS EQUAÇÕES—

REGRA DE CRAMER COM PADRÕES

$$\begin{cases} a_1 x + a_{12} y = b_1 \\ a_2 x + a_{22} y = b_2 \\ a_3 x + a_{32} y = b_3 \end{cases}$$

EDILSON BILA

Agradecimentos

Edilson Salomão Bila:

É com muita alegria que compartilho este manual a cada um de vocês para poder facultar o entendimento sobre sistemas de três equacões e três variaveis .

Não tenho muito a dizer se não agradecer a todos , em especial a Deus por me proporcionar a capacidade intelectual mínima para fazer ou descrever uma abordagem como esta . A minha família por me apoiar diretamente ou inderetamente ,por serem uma grande fonte de inspiração e agradeço também a todos meus fieis amigos de longa data.

Índice

Introdução

A regra de Cramer ,desenvolvida por **Gabriel Cramer** no **século XVIII** é um método matemático que utiliza determinantes para resolver sistemas de equações lineares com o mesmo número de equações e incógnitas ou variáveis . Como explica **David C.Lay** em seu livro **Álgebra Linear e suas Aplicações(2005)**,essa regra oferece uma forma directa de encontrar as soluções de sistemas quadrados , sendo especialmente prática para sistemas com três equações e três incógnitas . No entanto , como percebi ao ensinar essa técnica , o desafio em memorizar os passos e entender a Aplicação dos determinantes . Por isso , a criação de um padrão visual pode ser uma ferramenta eficaz para facilitar o aprendizado e ajudar a fixar o conteúdo de maneira mais intuitiva e clara . Embora este manual se baseie na regra de Cramer para resoluçao de cálculos de sistemas de 3 equações , é importante destacar que , ao calcular os determinantes , usamos um padrão visual da regra de Sarrus . A regra de Sarrus é um método tradicional para encontrar determinantes de matriz de de 3colunas e 3 linhas de forma rápida por meio de diagonais . Neste manual , quero apresentar uma versão alternativa e mais intuitiva , inspirada no padrão de desbloqueio de celulares , para facilitar a memorizacão desse tipo de processo . Assim a abordagem continua fiel ao método de Cramer , mas com uma forma criativa de aplicar o cálculo dos determinantes (delta,delta**x**,delta**y** e delta**z**”) . A regra de padrão ela é aceite para todos os sistema de 3 equações e 3 incógnitas , nos capitúlos seguintes explicarei como funciona esse padrão de desbloqueio para o exercício de sistemas de 3 equações e 3 incógnitas.

Sistemas de três equações “Cramer “

Dado um sistema de três equações e três incógnitas seguinte :

¿

Para resolver esse tipo de sistema usando a regra de “Cramer” que se deduz em primeiro fazer o ▲”delta” e prosseguindo com o ▲ x, ▲ y e por fim o ▲ z. E para conhecer os valores das incógnitas basta fazer o seguinte *:*

Por exemplo *:*

valor do $x=\frac{▲x}{▲}$, $y=\frac{▲y}{▲}$ e $z=\frac{▲z}{▲}$.

Para cada delta retira-se os coeficientes das variaveis **x,y,z** e **b,**onde o b e o valor sem incognita , isto é , o valor depois da igualdadede todas equações no sistema acima .

Devemos ter em mente também as condições seguintes :

- No cálculo do ▲ teremos na matriz os coeficientes das variaveis **x , y** e **z .**
- No cálculo do ▲ x teremos na matriz os coeficientes das variaveis e o valor da variavel **b** no lugar do **x ,** isto é , valores **b , y** e **z .**
- No cálculo do ▲ y teremos na matriz os coeficientes das variaveis e o valor da variavel **b** no lugar do **y ,** isto é , valores **x , b** e **z .**
- No cálculo do ▲ Z teremos na matriz os coeficientes das variaveis e o valor da variavel **b** no lugar do **z ,** isto é , valores **x , y** e **b .**

Mostrando na prática ficará assim :

$$\blacktriangle = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{vmatrix} \;, \blacktriangle\ x = \begin{vmatrix} b_{11} & A_{12} & A_{13} \\ b_{21} & B_{22} & B_{23} \\ b_{31} & C_{32} & C_{33} \end{vmatrix} \;,$$

$$\blacktriangle\ y = \begin{vmatrix} A_{11} & b_{12} & A_{13} \\ B_{21} & b_{22} & B_{23} \\ C_{31} & b_{32} & C_{33} \end{vmatrix} \; e \; \blacktriangle\ z = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & b_{13} \\ B_{21} & B_{22} & b_{23} \\ C_{31} & C_{32} & b_{33} \end{vmatrix}$$

Para cada matriz acima ilustrado o número de baixo mostra o número de **linhas** x **colunas .**

Exemplo :

A_{11} onde o primeiro 1 representa o número da linha em que o elemento”A’ se encontra e o segundo o número da coluna em que o mesmo se encontra .

A regra do Cramer diz que para calcular cada matriz devemos primeiro :

- Multiplicar o primeiro elemento da primeira linha e primeira coluna com os elementos na diagonal , isto é , o primeiro elemento da primeira linha e segunda coluna pelos elementos da segunda linha e segunda coluna e o elemento da terceira linha e terceira coluna.

Exemplo para a matriz do ▲:

$A_{11} * B_{22} * c_{33}$

- Multiplicar o segundo elemento da primeira linha e segunda coluna com os elementos da segunda linha e terceira coluna e o elemento da terceira linha e primeira coluna.

Exemplo para a matriz do ▲:

$A_{12} * B_{23} * c_{31}$

- Multiplicar o terceiro elemento da primeira linha e terceira coluna pelos elementos da segunda linha e primeira coluna e os elementos da terceira linha e segunda coluna.

Exemplo para a matriz do ▲:

$A_{13} * B_{21} * C_{32}$

Após esses cálculos verificaremos que usamos todos os elementos fazendo um trajeto que inicia de cima para baixo , o segundo passo é inverter a ordem,de baixo para cima neste caso , onde faremos *:*

- A multiplicação do elemento da terceira linha e primeira coluna pelos elementos da segunda linha e segunda coluna e o elemento da primeira linha e terceira coluna.

Exemplo para a matriz do ▲:

$C_{31} * B_{22} * A_{13}$

- A multiplicação do elemento da terceira linha e segunda coluna pelos elementos da segunda linha e terceira coluna e o elemento da primeira linha e primeira coluna .

Exemplo para a matriz do ▲:

$C_{32} * B_{23} * A_{11}$

- A multiplicação do elemento da terceira linha e terceira coluna pelos elementos da segunda linha e primeira coluna e o elemento da primeira linha e segunda coluna .

Exemplo para a matriz do ▲:

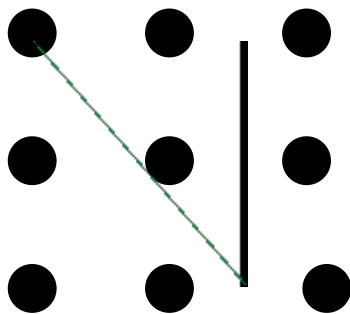
$C_{33} * B_{21} * A_{12}$

E para saber o valor de delta basta fazer o somatório do primeiro passo subtraindo o somatório do segundo passo:

Exemplo para a matriz do ▲:

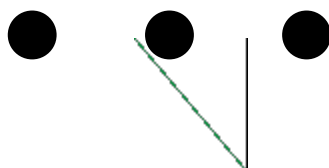
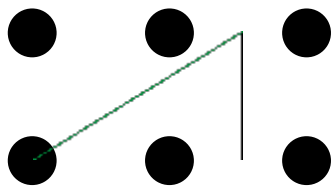
$A_{11}*B_{22}*c_{33}+A_{12}*B_{23}*c_{13}+A_{13}*B_{21}*C_{32}$ - $(C_{31}*B_{22}*A_{13}+C_{32}*B_{23}*A_{11}+C_{33}*B_{21}*A_{12}$)

Regra de Cramer com padrão

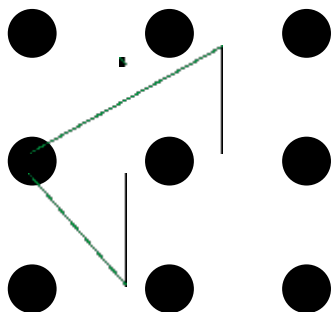
E agora vamos resumir cada um dos passos feitos acima ,imaginando o padrão do seu celular , supondo que seu celular só aceita colocar 6 codigos de forma sequencial e ordinal , como verificaremos nos passos abaixo , primero *:*

<u>1° passo(padrão)</u>

Exemplo para a matriz do ▲:

$A_{11}*B_{22}*c_{33}$

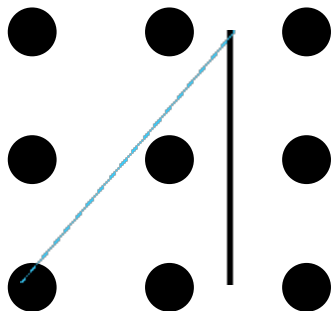
<u>2° passo(padrão)</u>

Exemplo para a matriz do ▲:

$A_{12} * B_{23} * c_{31}$

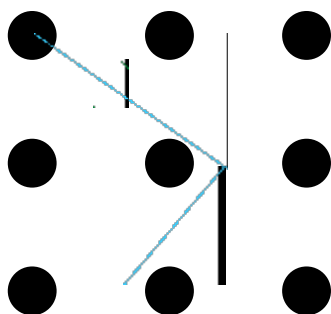
3° passo(padrão)

Exemplo para a matriz do ▲:

$A_{13} * B_{21} * C_{32}$

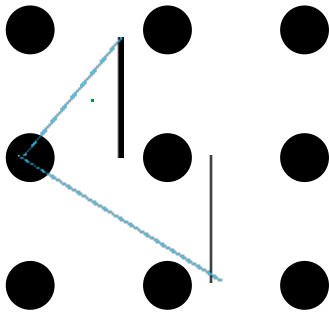
Após esses cálculos verificaremos que ja usamos todos os elementos fazendo um trajeto que inicia de cima para baixo , o segundo passo é inverter a ordem , de baixo para cima neste caso , onde faremos *:*

1° passo(padrão)

Exemplo para a matriz do ▲:

$C_{31} * B_{22} * A_{13}$

2° passo(padrão)

Exemplo para a matriz do ▲:

$C_{32} * B_{23} * A_{11}$

3° passo(padrão)

Exemplo para a matriz do ▲:

$C_{33} * B_{21} * A_{12}$

Resolução

Resolvendo o sistema em estudo usando a regra de Cramer teremos o seguinte :

- **Primeiro , parte de cima para baixo**

$$▲ = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} => 1*3*3$$

$$▲ = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} => 1*4*2$$

$$▲ = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} => 1*2*1$$

- **Segundo , parte de baixo para cima**

$$\blacktriangle=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&3&4\\2&1&3\end{vmatrix}=>2*3*1$$

$$\blacktriangle=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&3&4\\2&1&3\end{vmatrix}=>1*4*1$$

$$\blacktriangle=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&3&4\\2&1&3\end{vmatrix}=>3*2*1$$

Logo:

$\blacktriangle$=1*3*3+1*4*2+1*2*1 –

(2*3*1+1*4*1+3*2*1)

$\blacktriangle$=3.

$$\blacktriangle\ x=\begin{vmatrix}12&1&1\\6&3&4\\8&1&3\end{vmatrix}$$

- **Primeiro , parte de cima para baixo**

▲ $x=\begin{vmatrix} 12 & 1 & 1 \\ 6 & 3 & 4 \\ 8 & 1 & 3 \end{vmatrix} => 12*3*3$

▲ $x=\begin{vmatrix} 12 & 1 & 1 \\ 6 & 3 & 4 \\ 8 & 1 & 3 \end{vmatrix} => 1*4*8$

▲ $x=\begin{vmatrix} 12 & 1 & 1 \\ 6 & 3 & 4 \\ 8 & 1 & 3 \end{vmatrix} => 1*6*1$

- **Segundo , parte de baixo para cima**

▲ $x=\begin{vmatrix} 12 & 1 & 1 \\ 6 & 3 & 4 \\ 8 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 8*3*1$

▲ $x=\begin{vmatrix} 12 & 1 & 1 \\ 6 & 3 & 4 \\ 8 & 1 & 3 \end{vmatrix} => 1*4*12$

▲ $x=\begin{vmatrix} 12 & 1 & 1 \\ 6 & 3 & 4 \\ 8 & 1 & 3 \end{vmatrix} => 3*6*1$

Logo:

▲ $x = 12*3*3 + 1*4*8 + 1*6*1 - (8*3*1 + 1*4*12 + 3*6*1)$

▲ $x = 56.$

▲ $y = \begin{vmatrix} 1 & 12 & 1 \\ 2 & 6 & 4 \\ 2 & 8 & 3 \end{vmatrix}$

❖ **Primeiro , parte de cima para baixo**

▲ $y = \begin{vmatrix} 1 & 12 & 1 \\ 2 & 6 & 4 \\ 2 & 8 & 3 \end{vmatrix}$ => *1*6*3*

▲ $y = \begin{vmatrix} 1 & 12 & 1 \\ 2 & 6 & 4 \\ 2 & 8 & 3 \end{vmatrix}$ => *12*4*2*

▲ $y = \begin{vmatrix} 1 & 12 & 1 \\ 2 & 6 & 4 \\ 2 & 8 & 3 \end{vmatrix}$ => *1*2*8*

❖ **Segundo , parte de baixo para cima**

▲ $y = \begin{vmatrix} 1 & 12 & 1 \\ 2 & 6 & 4 \\ 2 & 8 & 3 \end{vmatrix}$ => *2*6*1*

▲ $y = \begin{vmatrix} 1 & 12 & 1 \\ 2 & 6 & 4 \\ 2 & 8 & 3 \end{vmatrix}$ => *8*4*1*

▲ $y = \begin{vmatrix} 1 & 12 & 1 \\ 2 & 6 & 4 \\ 2 & 8 & 3 \end{vmatrix} \Rightarrow 3*2*12$

Logo:

▲ $y = 1*6*3 + 12*4*2 + 1*2*8$ –

$(2*6*1 + 8*4*1 + 3*2*12)$

▲ $y = 14$

▲ $z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 12 \\ 2 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 8 \end{vmatrix}$

❖ **Primeiro , parte de cima para baixo**

▲ $z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 12 \\ 2 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 8 \end{vmatrix} \Rightarrow 1*3*8$

▲ $z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 12 \\ 2 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 8 \end{vmatrix} \Rightarrow 1*6*2$

▲ $z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 12 \\ 2 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 8 \end{vmatrix} \Rightarrow 12*2*1$

❖ **Segundo , parte de baixo para cima**

❖ **Segundo , parte de baixo para cima**

$$\Delta Z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 12 \\ 2 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 8 \end{vmatrix} \Rightarrow 2*3*12$$

$$\Delta Z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 12 \\ 2 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 8 \end{vmatrix} \Rightarrow 1*6*1$$

$$\Delta Z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 12 \\ 2 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 8 \end{vmatrix} \Rightarrow 8*2*1$$

Logo:

$$\Delta z = 1*3*8 + 1*6*2 + 12*2*1 -$$

$$(2*3*12 + 1*6*1 + 8*2*1)$$

$$\Delta z = -34$$

Soluções

para calcular os valores de x,y e z basta recorrer as seguintes fórmulas:

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{56}{3} = 18{,}666$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{14}{3} = 4{,}666$$

$$z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{-34}{3} = -11{,}333$$

A solução do sistema

¿

$S=\{x;y;z\}$

$S=\{18,666;4,666;-11,333\}$

Conclusão

Este manual tem como fundamento a fácil compreensão da regra de Cramer para alunos com dificuldades em memorizar fórmulas complexas como a do Cramer , também pode servir de um guião para os educadores , professores e áreas a fim . Olhar para sistemas de equações e imaginar um padrão (código de acesso) . Espero ter trazido uma abordagem mais suave em questões de resolução e memorização.

Referências Bibliográficas

Bila, E. S. (2025). *Sistemas de três equações -Regra de Cramer com Padrões.* (1,.ed) Maputo: personalizado.

LAY, D. C. (2006.). *Álgebra Linear e suas Aplicações* (3.ed)São Paulo: Pearson Addison Wesley.